



## Concours ITA session 2024

Composition : **Mathématiques 4** (algèbre, analyse)

Durée : **3 Heures**

BUREAU CENTRAL des CONCOURS

### Consignes pour les candidats

Merci de ne rien marquer sur le sujet.

### EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' - 4y = (-x+1)e^x$

1. Résoudre l'équation (E')  $y'' - 4y = 0$

Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction g définie par  $g(x) = (ax + b)e^x$  soit une solution particulière de (E).

2. a) Donner l'ensemble des solutions de (E).  
b) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par le point A (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation  $y + x = 0$ .

### EXERCICE 2

#### PARTIE A

Soit g la fonction définie sur  $]0; +\infty[$ , par  $g(x) = (x+1) - \ln x$

1. Soit g' la fonction dérivée de g.  
a) Calculer  $g'(x)$ .  
b) Donner les variations de la fonction g.  
2. Calculer  $g(1)$  et justifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) > 0$

#### PARTIE B

Soit la fonction f définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = -1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1. a) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$   
b) Donner une interprétation graphique du résultat.  
c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. On note  $f'$  la dérivée de  $f$

a) Prouver que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ , f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire la variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3. a) Justifier que sur  $]0; +\infty[$  , l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  .

c) Prouver que  $\alpha \in ]1,9; 2[$  .

4. a) Prouver que la fonction  $F$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 2x$  est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  .

b) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$  ; l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$ .

### EXERCICE 3

On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ .

1.  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans  $B_0$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que  $A^2 = A$

b) Déterminer le noyau  $\ker f$  et l'image  $\text{Im} f$  de  $f$  ; préciser une base de chaque sous-espace vectoriel.

2. On considère les vecteurs  $u = (1, 0, -1)$  ;  $v = e_2$  et  $w = (2, -1, -1)$  l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont la matrice dans  $B_0$  est notée  $H$  et tel que  $g(u) = u$ ,  $g(v) = v$  et  $g(w) = 3w$ .

a) Montrer que  $B'_0 = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

b) Déterminer la matrice  $H'$  de  $g$  dans la base  $B'_0$

c) Déterminer la matrice  $H$  de  $g$  dans la base  $B_0$

3. On pose  $g^n = a_n f + \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  (où  $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$  est l'identité de  $\mathbb{R}^3$ ).

a) Montrer que  $a_{n+1} = 2 + 3a_n \forall n \geq 1$

b) On considère la suite  $(b_n)$  définie par  $b_n = 1 + a_n$

- Vérifier que  $(b_n)$  est une suite géométrique, dont on donnera la raison et son premier terme.

- Ecrire  $b_n$  puis  $a_n$  en fonction de  $n$ .

4. a) Prouver que  $g^n$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

$\left( \text{On rappelle } g^n = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}} \right)$

b) Donner la matrice de  $g^n$  dans la base  $B_0$  , en fonction de  $A$ ,  $I_3$  et  $n$